EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

Varianta ….003

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $(1-i)^4$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $C(1,1)$ la dreapta $x+y=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$, în punctul $P(4,3)$.

(4p) **d)** Să se determine $a>0$, astfel încât punctul $C(1,1)$ să se afle pe cercul $x^2+y^2=a$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1,-1)$, $B(3,-3)$ și $C(1,1)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(cos\,\pi+i\,sin\,\pi)^3=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x+3\cdot2^x-4=0$.

(3p) **b)** Să se calculeze expresia $C_6^1-C_6^2+C_6^4-C_6^5$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este $f(x)=x^4-x$, să se calculeze $(f\circ f)(1)$.

(3p) **d)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,...,5\}$, să verifice relația $2^n\ge3n+2$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma elementelor din grupul $(\mathbf{Z}_8,+)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ln(x^2+3)$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 4\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulțimea M formată din toate matricele cu 3 linii şi 3 coloane şi toate elementele din mulțimea numerelor naturale.

(4p) **a)** Să se verifice că $E\in M$ şi că $I_3\in M$.

(4p) **b)** Să se arate că dacă $A,B\in M$, atunci $A+B\in M$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $A,B\in M$, atunci $A\cdot B\in M$.

(2p) **d)** Să se calculeze determinantul matricei E .

(2p) **e)** Să se găsească o matrice $C\in M$, astfel încât $rang(C)=1$ şi o matrice $D\in M$, astfel încât $rang(D)=2$.

(2p) **f)** Să se arate că matricea E este inversabilă şi $E^{-1}\notin M$.

(2p) **g)** Să se arate că, dacă matricea $X\in M$ este inversabilă şi $X^{-1}\in M$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie a sa este egală cu 1 şi suma elementelor de pe fiecare coloană a sa este egală cu 1.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\ln a-a\ln x$, unde $a\in\mathbf{R}$, $a>0$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x>0$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f(a)$ şi $f'(a)$.

(4p) **c)** Să se arate că $e^x\geq x^e$, $\forall x\in(0,\infty)$.

(2p) **d)** Utilizând teorema lui *Fermat* să se determine $a>0$ astfel încât $f(x)\geq 0$, $\forall x\in(0,\infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că $\int_1^2 e^x dx\geq\int_1^2 x^e dx$.

(2p) **f)** Să se arate că pentru $x>0$, avem $e^x=x^e$ dacă şi numai dacă $x=e$.

(2p) **g)** Să se determine numerele reale $c, b, d>0$ cu proprietatea că $c^x+b^x+d^x\geq x^c+x^b+x^d$, $\forall x\in(0,\infty)$.